



Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

4 | 1989
François Arago (1786-1853)

Le Cours d'arithmétique sociale de François Arago à l'École polytechnique (1825) : Transcription des notes prises par l'élève Hippolyte Renaud

Pierre Crepel



Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/sabix/564>

DOI : [10.4000/sabix.564](https://doi.org/10.4000/sabix.564)

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 1 mai 1989

Pagination : 56 – 73

ISBN : ISSN N° 2114-2130

ISSN : 0989-30-59

Référence électronique

Pierre Crepel, « Le Cours d'arithmétique sociale de François Arago à l'École polytechnique (1825) : Transcription des notes prises par l'élève Hippolyte Renaud », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 4 | 1989, mis en ligne le 09 avril 2011, consulté le 07 septembre 2020. URL : <http://journals.openedition.org/sabix/564> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.564>

Ce document a été généré automatiquement le 7 septembre 2020.

© SABIX

Le Cours d'arithmétique sociale de François Arago à l'Ecole polytechnique (1825) : Transcription des notes prises par l'élève Hippolyte Renaud

Pierre Crepel

Règles adoptées pour la transcription :

Nous reproduisons intégralement les 30 pages manuscrites du petit cahier de notes (souvent difficiles à lire) d'Hippolyte Renaud. Nous avons conservé l'orthographe de l'époque (y compris les fautes), les abréviations et les soulignages ; nous avons par contre rétabli les accents, la ponctuation et les majuscules chaque fois que cela facilitait la lecture du texte. En général, les mots ou passages barrés dans le manuscrit ne sont pas signalés. Les quelques ajouts de notre part, nécessaires pour la compréhension du texte, sont insérés entre crochets, sous les formes suivantes :

[pour dire] : mots oubliés par l'élève ou explications,

[**Evénements composés**] : sous-titre,

[6/7] : changement de page dans le manuscrit,

[?] : le mot précédent est douteux,

[... ?] : mot non déchiffré (les mots douteux ou non déchiffrés auront ici, en fait, peu d'incidence sur le sens du texte).

1 **Ecole Polytechnique** Hte RENAUD 1ère division [1] Pr Mr Arago 7 juillet 1825

Notes sur le cours d'arithmétique sociale

1ère leçon

[Probabilité et certitude]

- 2 Il est des événements probables et des événements certains. Tirage d'une boule blanche : s'il n'y a que des boules blanches [il] est certain, s'il y a une boule noire sur un million de blanches le tirage d'une boule blanche n'est plus que probable. Plus il y a de boules noires, plus il est probable qu'il en sortira une. etc...

[Définition de la probabilité]

- 3 Probabilité est la raison de croire qu'un événement arrivera. C'est numériquement la fraction ayant pour Nteur le nombre des cas favorables et pr Dteur le nombre de cas possibles. Si on jette un dez à 6 faces, il y a $1/6$ à croire qu'il y aura 6. Dans le calcul des probabilités, la certitude est 1, et toutes les autres prob. [sont représentées] par une fraction.- Est-il évident que la probabilité est la même quand la proportion est la même entre les cas favorables et défavorables ? il faut le D^{trer} $[1/2]$
- 4 Raisonement de Mr Laplace. Supposons 2 boules blanches et une boule noire, la probabilité qu'on tirera une boule noire est $1/3$. Si dans une autre urne 6 boules, 4 blanches et 2 noires, prob. est encore $1/3$. Supposons dans le 2^d cas les boules blanches liées par un fil 2 à 2, ainsi que les 2 boules noires (cas précédent). Supposons que, quand on tire la boule, le fil se rompt, la probabilité est encore la même. Pour qu'on tire noire etc.

[Événement contraire]

- 5 Il n'est pas d'événement qui n'ait l'événement contraire, il faut donc qu'en ajoutant les probabilités de l'événement et de l'événement contraire la somme soit égale à 1. C'est un moyen de vérification, croix ou pile la prob. est $1/2$ pour l'un ou l'autre.

[Événements composés]

- 6 Il y a des événements composés. Supposons qu'un événement composé soit dépendant de 2 événements indépendants l'un de l'autre. Alors la prob. de cet événement est le produit des [probabilités des] événements simples. Par ex. avec deux dez la probabilité qu'on aura double 6 est $(1/6).(1/6)$. Les 6 manières peuvent
- 7 $[2/3]$
- 8 se combiner de 36 manières différentes : dans ces 36 comb. une seule est 6.6, donc la probabilité est $1/36 = (1/6).(1/6)$, la prob. contraire est $35/36$, donc les sommes que devraient jouer deux joueurs pour qu'il y ait égalité seraient donc comme 35 : 1.

[Indépendance]

- 9 Mais il faut que le 2^d n'ait pas de l'influence sur 1er évén. : par ex., si on a 13 cartes, la probabilité pour que les 2^{lères} cartes soient 1 et 2, la probabilité n'est pas $(1/13).(1/13)$

parce que, la lere carte une fois sortie, il n'y a plus que 1/12 à parier que la 2^{de} sortira on a donc pour la probabilité totale $(1/13).(1/12) = 1/156$.

- 10 13 cartes peuvent se combiner de 13.12.11.....2.1.- les 2^{1ères} cartes étant 1 et 2, les autres cartes peuvent se combiner de 11.10.....2.1
- 11 Divisant etc
- 12 Cette remarque est importante parce qu'il est facile de se tromper et on peut souvent croire des événements indépendans les uns des autres lorsque le contraire a lieu.
- 13 [3/4]

[Objections de d'Alembert]

- 14 Prob. pour que on ait pile au moins une fois en jettant deux fois [la pièce au jeu de croix ou pile (= pile ou face)] ?
- 15 Il est possible que l'on ait :
- 16 $1/4 ++$ [pile,pile]
 $1/4 +-$ [pile,croix]
 $1/4 -+$ [croix,pile]
 $1/4 --$ [croix, croix]
- 17 il y a donc 4 cas et il en est 3 qui font gageure : on a donc, pour la prob. : $3/4$, - ex $1/4$ [?]
- 18 D'alembert avoit dit : si croix [en fait : pile] sort le 1er coup je n'en joue pas un 2^d de manière que
- 19 + [pile]
 -+ [croix,pile]
 -- [croix, croix]
- 20 [sont les 3 seuls cas possibles, et seuls les 2 premiers font gageure], donc prob. $2/3$. Il se trompoit puisqu'il agissait [?] sur des quantités hétérogènes.
- 21 La prob. que pile sortira au 1er coup est $1/2$, les 2 autres comb. ont pour prob. $1/4$, donc on ne peut pas les ajouter on peut cependant par ce mode de [raisonnement] arriver au résultat en remarquant que la prob. totale est la somme des prob. partielles : la prob. qu'on gagnera à cause de la 1^{ère} comb. est $1/2$, la 2^{de} est $1/4$, donc $3/4$ etc.

[Répétitions]

- 22 Prob. de la sortie du 6 est $1/6$. Dans 2 coups $(1/6).(1/6)$ est la prob. qu'on aura 2 6. En 3 coups $(1/6).(1/6).(1/6)$ etc. etc. Une événement dont la prob. est assez grande peut ne se répéter
- 23 [4/5]
- 24 un très grand nombre de fois qu'avec une très petite probabilité. Cela donne lieu à une illusion. Si le 6 sort 10 fois de suite, on croit qu'il est prob. qu'il ne sortira plus, c'est une erreur grossière.
- 25 Si on ne changeoit pas de dez on pourroit croire que le dez n'est pas régulier et alors il faudroit mieux parier pour le N° 6.
- 26 [5]

2ème leçon

[Probabilités composées dans le cas non indépendant]

- 27 Soient 3 urnes A B C, dont deux ne renferment que des boules blanches et l'autre que des boules noires. La probab. que, en mettant la main dans A, on retire une boule blanche est $2/3$, ensuite la prob. qu'on aura une boule blanche en tirant dans B sera $1/2$, donc la prob. sera $(2/3).(1/2) = 1/3$: on a donc $1/3$ de prob. pour qu'en tirant deux boules de suite dans deux vases, les deux soient blanches.

[Des inégalités inconnues qui peuvent exister entre les chances que l'on suppose égales]

- 28 Si on sait qu'une pièce est irrégulière, il vaut mieux parier pour ++,-- [c'est-à-dire pour une répétition de l'événement] que pour +,- [c'est-à-dire pour une alternance], quoique l'on ignore quelle est la face dont l'irrégularité favorise la sortie.
- 29 En effet, + aura pour prob. $1/2 + a$ [a est positif ou négatif]
- 30 $1/2 - a$
- 31 ++ aura pour prob. $(1/2 + a)(1/2 + a) = 1/4 + a + a^2$
- 32 -- $1/4 - a + a^2$
- 33 Mais on ne sait pas si c'est + ou - ... que l'irrég. favorise, il faut donc
- 34 [5/6]
- 35 pour la prob. de ++ ou - additionner et diviser par deux, la prob. est donc $1/4 + a^2$
- + - a pour prob. $(1/2 + a)(1/2 - a) = 1/4 - a^2$
- + a pour prob. $(1/2 - a)(1/2 + a) = 1/4 - a^2$
- 36 donc il y a de l'avantage à parier que le même coup sera [?] deux fois.

[Pair ou non]

- 37 Quelle est la prob. pour qu'en tirant des objets semblables a,b,c,d,e,f, on en ait un nombre impair ? [« lorsqu'on vous présente une main fermée pleine de jetons, et qu'on vous demande si le nombre en est pair ou non-pair... » (l'Encyclopédie, article « pair ou non »)]
- 38 Soit n le nombre des objets.
- 39 $(1+a)^n = 1 + [n/1] a + [n(n-1)/1.2] a^2 + [n(n-1)(n-2)/1.2.3] a^3$ etc.
Les coeff. successifs sont les comb. que n quantités peuvent fournir 1 à 1, 2 à 2, etc.
[Faisons] a = 1 :
- 40 $(1+1)^n = 1 + n/1 + n(n-1)/1.2 + n(n-1)(n-2)/1.2.3 +$ etc
- 41 donc $2^n - 1 =$ (somme des comb. imp. + des com. paires) = P + I
- 42 [P représente, dans ce raisonnement, le nombre de combinaisons contenant un nombre pair d'objets, I le nombre de celles qui en contiennent un nombre impair]
- 43 Si a = -1
- $0 = 1 - n/1 + n(n-1)/1.2 - n(n-1)(n-2)/1.2.3 +$ etc
- = 1 - I + P, donc I - P = 1

- 44 La prob. de la sortie d'un nomb. imp. [d'objets] est $2^{n-1}/(2^n-1)$
La prob. pair $(2^{n-1}-1)/(2^n-1)$
- 45 Si zéro était dans les comb. paires, il y aurait égalité, mais comme on l'exclut etc, il vaut mieux parier impair.
- 46 [6/7]

[Probabilité des causes]

- 47 D'après un événement accompli chercher les prob. des diverses causes qui ont pu produire cet événement.
- 48 Supposons dans une urne deux boules ; on en tire une blanche, l'autre est-elle blanche ou noire ? Or si les deux étoient blanches, il y auroit eu certitude qu'on auroit tiré une blanche ; si les deux étoient l'une blanche et l'autre noire, il n'y avait que 1/2 de prob.
- 49 [ajouté en marge] Or si la 1ère hyp. avoit lieu, [soit] bb, la chance pour que la boule blanche sorte seroit 1, si le 2^d cas bn avoit lieu, la chance pour qu'il sorte une blanche seroit 1/2, et 1/2 pour qu'il sorte une noire. Or il faut rejett. cette dernière chance parce que, pour savoir qu'il est sorti une blanche, la somme des chances dans les deux cas est donc $1 + 1/2$, or dans le premier cas la prob. est 1, donc $1/(1 + 1/2)$ [représente la probabilité de la 1ère cause] etc [fin de l'ajout]
- bb bn comb. possibles
 - $1^{1/2}$ prob.
- 50 le nombre total de cause est $1+1/2$, donc 1^{ère} cause $1/(3/2) = 2/3$
- 51 donc, de toutes les causes auxquelles [l']événement arrivé peut être attribué, celle en vertu de laquelle il est le plus simple [?] est la plus probable, etc
- 52 Supposons qu'après avoir retiré la boule blanche on la remette, cherchons la prob. pour qu'on tire une seconde fois une boule blanche. Si les deux boules sont blanches, la prob. est 1 ; si l'une est noire, la prob. est 1/2 ; mais la prob. [de] bb est 2/3, donc la prob. qui étoit 1 est $1 \cdot 2/3 = 2/3$.
- 53 Dans la 2^{de} hyp. bn, si cette comb. étoit certaine, on aurait 1/2 ; mais la prob. de bn est 1/3, donc la prob. est 1/6, donc la prob. de la sortie [d'une nouvelle boule blanche] est $2/3 + 1/6 = 5/6$.
- 54 [7/8]
- 55 C'est sur ce principe qu'on se fonde [pour dire] que la prob. fondée sur une cause certaine, si la cause devient incertaine, doit être atténuée [?] dans le rapport de 1 à la prob. de la cause etc.

[Espérance mathématique]

- 56 Dans les jeux, les joueurs qui jouent avec des chances inégales doivent exposer une quantité d'argent prop. aux nombres de chances qui peuvent les faire gagner, donc [suivent 12 lignes rayées remplacées par le renvoi en marge suivant :]
- 57 $a : b :: e : f : af = be$
- 58 On représente par a la mise du 1er joueur, par b celle du 2^d, par e et f les prob. qu'ils ont de gagner. Or a est la somme que [?] peut gagner le 2^d joueur avec la prob. f, af est son espérance M^{tique} , les espérances M^{tiques} des deux joueurs doivent donc être égales.

- 59 Si on regarde l'argent mis au jeu comme n'appart. plus au joueur, $(a+b)$ sera ce qu'a pu [?] gagner chacun d'eux, alors on aura
- 60 $(a+b)e = ae + be = a(e+f) = a$
-car $e+f = 1$
- 61 [suivent 5 lignes barrées illisibles]
- 62 les espérances mathématiques ainsi considérées doivent être égales aux mises des joueurs. [fin du renvoi]
- 63 Supposons 1 000 000 de chances dont 1 pour A et 999 999 pour B la prob. du 1er est $1 / 1\,000\,000$ et du 2^d est $999\,999 / 1\,000\,000$. Donc on doit faire entrer d'autres considérations parce que malgré l'égalité des chances personne ne jouerait 999 999 francs contre 1 franc. [voir ci-après note d'explication sur l'espérance morale]
- 64 [8/9]

Problème de Pétersbourg

- 65 [à la hauteur des premières lignes, il y a en marge des inscriptions barrées et illisibles, ainsi que la mention « faux »]
- 66 Supposons deux joueurs qui jouent avec cette condition qu'au 1er coup, si pile sort, A donne à B 2# ; s'il ne sort qu'au 2^d coup, [la somme donnée] est 4 ; s'il sort au 3^{ème}, 8 etc. Le jeu étant fini, A prend la somme déposée par B au commencement du jeu ; quelle doit être cette somme ? B désire que pile ne paraisse que le plus tard possible ; les espérances [en fait : les probabilités] sont donc :
- 67 $1/2 \ 1/4 \ 1/8 \ 1/16 \ 1/32$ etc.,
- 68 les sommes qu'il espère sont :
- 69 $2 \ 4 \ 8 \ 16 \ 32$ etc..
- 70 Formant le produit de ces esp. par les gains qu'elles permettent et faisant la somme,
- 71 $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc} : \infty$
- 72 est l'esp. mathématique de B.
- 73 Si au lieu de jouer indéf., les joueurs sont convenus de s'arrêter après 100.000 coups, l'espérance mathématique de B sera 100.000 il faut
- 74 [suivent 4 lignes rayées, en marge un ajout rayé illisible, enfin un renvoi non rayé en marge que voici :]
- 75 il faut que celle de A soit égale. Or on lui donne une somme, sa prob. de la gagner est $1/2 + 1/4 + 1/8$ etc $= 1$; sa prob. $1 \times$ [...abréviation de multipliée ?] par la somme doit évaluer 100.000 : il doit donc recevoir 100.000# [fin du renvoi]
- 76 (Il n'est pas tout à fait certain que, dans 100.000 coups, + paraîtra une fois, aussi $1/2 + 1/4 + 1/8 + \text{etc}$. n'est pas tout à fait égale à 1, mais il s'en faut de si peu que nous laisserons la prob. 1) [suivent 4 lignes rayées]
- 77 [Or, comme on l'a dit plus haut, il est évident que personne n'accepterait de s'engager dans ce jeu théoriquement équitable. Une explication consiste à introduire l'espérance morale]
- 78 [10]

3ème leçon

- 79 Nous avons vu qu'il fallait considérer outre l'espérance M^{tique} ce que nous avons appelé espérance morale.
- 80 Calcul des partis. Deux joueurs A et B jouent avec la condition que le 1^{er} qui aura gagné trois parties, aura gagné la mise S à laquelle ils ont contribué également. S'ils s'arrêtent avant les trois parties gagnées par 1 [des joueurs], il faut qu'ils partagent la somme proport. aux espérances qu'ils ont de gagner. Supposons que A ait gagné deux parties et B une. Sur la 4^{ème} partie la prob. du joueur A est $1/2$; $1/2$ n'est pas une prob. qui puisse faire gagner le joueur A. car il faut qu'il gagne aussi la 5^{ème}. La prob. qu'il gagnera la 5^{ème} est $1/2$, donc la prob. est le produit etc. $1/4$.
- 81 Le joueur A peut gagner la 3^{ème} en perdant la 4^{ème}, donc il a encore une prob. $1/4$ pour gagner la 5^{ème}, donc la prob. totale est $1/2 + 1/4 = 3/4$ l'autre a $1/4$. Chacun avoit mis une somme $(1/2) S$, donc la somme S est à partager dans le rapport de $3/4 : 1/4 ; ; 3 : 1$... ou - [?]
- 82 [10/11]

Loterie de France

- 83 [On tire périodiquement] chaque fois 5 N°. Le nombre des N° est de 90. On joue l'extrait [pari sur un numéro], l'ambe [sur 2] etc, [le terne (sur 3), le quaterne (sur 4),] on ne joue plus le quine [sur 5]
- 1° En jouant l'extrait, la prob. qu'il sortira sera $5/90 = 1/18$, donc l'administ. devrait rendre 18# fois la mise mais on ne donne que 15#.
 - 2° En jouant l'ambe. 90 N° se combinent 2 à 2 de $90.(90-1)/1.2 = 4005$ [façons].
5 N° fournissent $5.4/1.2 = 10$: la prob. est à peu près $1/400$, il faudrait qu'on rendît 400 fois la mise, or on ne rend que 270 fois la mise.
 - 3° 90 N° peuvent se combiner 3 à 3 de $90.(90-1)(90-2)/1.2.3 = 117\ 480$.
5 N° peuvent se combiner 3 à 3 de $5.4.3/1.2.3 = 10$, donc la prob. est $1/11748$. On devrait donc rendre 11748#, on donne 5500, on ne rend donc pas la moitié de ce qu'on devrait rendre.
 - 4° $90.(90-1)(90-2)(90-3)/1.2.3.4 = 2\ 555\ 190$ est le nombre des quaternes.
 $5.4.3.2/1.2.3.4 = 5$, donc la prob. est $1 / 511\ 038$, on devrait donc donner 511 038, on ne donne que 75 000 la mise. Elle ne donne guère que $1/7$ de la mise.
- 84 [11/12]
- 5° On ne joue plus le quine, il y avoit 43 950 000 [combinaisons] à peu près. On devoit donc rendre 44 000 000 de fois la mise, on ne le joue plus parce que très peu de personnes y jouoient.
[en marge, d'une autre écriture (?) :] quine déterminé [= en spécifiant l'ordre des tirages] : nombre de quine 5274 millions.
- 85 On fermoit un N° quand il étoit trop chargé, mais actuellement les pontes peuvent charger autant qu'ils veulent.
- 86 Martingale. Il faut une fortune énorme. C'est une comb. très factice [?].

Tables de mortalité

- 87 A chaque année on cherche combien d'individus meurent après 1 an, 2 ans, 3 ans, etc. Soient n, n', n «le nombre des individus vivans après chaque année, mais on ne peut

faire ainsi les obser. car les individus voyagent, alors on prend une ville où la popu. est constante et on compte combien il meurt d'individus de 1 an, 2 ans, 3 ans, etc [renvoi en marge]. Après un grand nombre d'observations on a un registre qui donne :

88 v indivi. morts à 1 an

89 v' indivi. morts à 2 ans

90 v'' 3 ans

91 v''' 4 ans

92 v^{iv} 5 ans

93 ...

94 la population étant constante, on peut regarder tous les individus comme nés en même tems et alors, n étant le nombre total, on a :

95 n-v indiv. restant à 1 an ($n-v = n'$)

96 $n'-v = n''$ rest. à 2 ans

97 etc, on a ainsi une table de mortalité [fin du renvoi].

[Vie probable, vie moyenne]

98 La vie prob. est le terme après lequel il y a à parier qu'on mourra. Par ex., on cherche quand le nombre des individus est réduit à la moitié etc.

99 Des causes de mortalités existent souvent dans certaines villes, les villes frontières [?] par ex., ainsi ce qui est vrai pour toute la France ne l'est pas pour Paris. C'est à 5 ans que la vie prob. est la plus longue. On peut calculer aussi la vie moyenne.

100 [12/13]

101 La vie moyenne en France est de 30 ans, en Suisse de 40.

102 n-n' indiv. sont morts en un an [renvoi en marge :] ils sont morts également dans tous les tems de l'année ils ont vécu un tems moyen [de] 1/2 an, en somme ils ont donc vécu $(n-n') 1/2$ [fin du renvoi] ou :

103 les n-n' ont donc vécu 1/2 an $(1/2)(n-n')$

104 $n'-n''$ ont vécu 1 an 1/2 $(3/2)(n'-n'')$

105 $n''-n'''$ ont vécu 2 ans 1/2 $(5/2)(n''-n''')$

106 ...

107 [On obtient la] Vie moyenne en additionnant : $(1/2) n + n' + n'' + n'''$ etc nombre total d'années qu'on vécu tous les individus ; donc un individu a vécu :

108 $1/2 + (n'+n''+n''' + \text{etc})/n$

109 En comparant la vie à un jeu dont le gain est le nombre d'années, un joueur a donc pour prob. de vivre [1/2 an] $(n-n')/n$, $[(n'-n'')]/n$ de vivre 3/2 ans, $[n''-n''']/n$ de vivre 5/2 ans.

110 Son espérance m^{tique} est donc :

111 $[(n-n')/n] \cdot (1/2) + [(n'-n'')/n] \cdot (3/2) + [(n''-n''')/n] \cdot (5/2) \dots,$

112 en ajoutant : on a la durée de la vie moyenne ou le bénéfice probable d'un joueur.

113 Certaines professions, les chappeliers, les doreurs etc, vivent moins longtemps.

- 114 Mortalité moins considérable pour les femmes que pour les hommes.
- 115 Ainsi la vie moyenne d'une certaine profession n'est pas la vie moyenne totale d'un pays etc.
- 116 Veut-on avoir la prob. pour qu'un mariage contracté entre un homme de 25 et une femme de 20 dure 5 ans ; il faut chercher la prob. pour que l'homme vive 5 ans et la femme 5 ans, le produit des prob. donne évidemment la prob. cherchée, car c'est un événement complexe.
- 117 [14]

Leçon 4ème

[Estimations de la population, multiplicateur universel]

- 118 Au moyen de ces tables, nous avons vu comment on détermine la vie moyenne. Lorsque la population est à peu près stationnaire on peut déduire la vie moyenne par les naissances et les morts.
- 119 Supposons que l'on ait une table [?]
- 120 0... ... n
- 121 1 n'
- 122 2... ... n''
- 123 3 n'''
- 124 4... ... n^{iv}
- 125 ...
- 126 Il y a une erreur car on suppose que les individus meurent subitement. Cette table peut donner la population en corrigeant l'erreur : en supposant que l'on a [renvoi en marge :]... n individus, il en reste n' après la 1ère année etc ; n-n' individus est donc le nombre d'indiv. qui vivent 1/2 an, il y a donc, au milieu de l'année, (n-n')/2 indiv., car il doit en être mort (n-n')/2 . - le nombre des individus qui restent est donc :
- 127 $n - (n-n')/2 = (n+n')/2$ [fin du renvoi] $(n+n')/2$ de l'âge 1/2 $(n'+n'')/2$ de l'âge 3/2 $(n'' + n''')$ /2 de l'âge 5/2
- 128 ...
- 129 Si la population est stationnaire la somme donne la population
- 130 $n/2 + n + n'' + n''' + \text{etc.}$
- 131 Divisons par n, le quotient sera
- 132 $1/2 + (n'+n'' + n''' + \dots)/n,$
- 133 durée de la vie moyenne, ainsi on a la durée de la vie moyenne en divisant la population par le nombre des naissances. Or, dans les registres de l'état civil, on a le nombre le nombre de naissances et le nombre de morts avec leur âge ;
- 134 [14/15]
- 135 de là on en peut déduire la population. Pour trouver le coefficient, par lequel il faut multiplier les naissances pour avoir la population, on a cherché dans plusieurs départements, au nord, au midi, au centre, à l'est, à l'ouest, etc. : on a trouvé 281/2 ; en

1802, en France, les naissances étant de 1,000,000, on en [?] conclut que la population est 29,000,000.

[Inoculation]

- 136 La petite vérole fesoit mourir 1/7 des individus. L'innoculation a diminué la mortalité qui ne fut plus que de 1/300. La vaccine a augmenté encore la vie moyenne etc.

[Proportions des naissances masculines et féminines]

- 137 En comparant les morts et les naissances remis [réuni ?] par les préfets, on trouve que l'augmentation de population est de 200 00 habitans [sic]. A Paris le nombre des naiss. garçons est à celui des filles : 22 : 21 ; dans toute la France c'est comme 17 : 16 - En Turquie comme en Europe, quoiqu'on ait pensé d'abord que la polygamie devoit empêcher cette diff.
- 138 [Interprétation à l'aide d'un schéma d'urnes]
- 139 Supposons un certain nombre d'urnes disposées en cercles et contenant des boules blanches et des boules noires ; on tire une boule de l'urne 1, qu'on met dans l'urne 2, on tire ensuite de l'urne 2 et on met dans l'urne 3 etc, en faisant les cercles. Après un grand nombre
- 140 [15/16]
- 141 de tours, bientôt les boules seront également réparties, c.à.d. que dans chaque urne le nombre des boules blanches sera à celui des noires comme le nombre total des boules blanches est au nombre total des noires.
- 142 Cela explique pourquoi, dans un recensement considérable, quoique les naissances des garçons soient peu diff. de celles des filles, on ne trouve jamais plus/moins [superposés sur le manuscrit] de filles que de garçons etc.

(arith. Commerc.) Questions d'intérêt d'argent

1. a est une somme elle rapporte
 2. $a(1+t) = a'$, après la 2^{de} année
 3. $a'(1+t) = a(1+t)^2 = a'' \dots$
 4. $a''(1+t) = a(1+t)^3 = a''' \dots$
- 143 donc une somme a devient après n années s : $a(1+t)^n$ C'est la somme modifiée par l'intérêt composé.
- 144 Cette formule sert à réduire une somme due après un certain nombre d'années à l'année présente la somme étant $A = a(1+t)^n$ il doit actuellement $a = A / (1+t)^n$ cette opération s'appelle l'escompte.
- 145 Une somme à intérêts composés augmente très rapidement. On peut se proposer de déterminer quand la somme aura doublé, on pose :
- 146 [16/17]
- 147 $a(1+t)^n = 2a$ d'où $n = (1.2)/(1+t)$. [en fait : $\log 2 / \log(1+t)$]
- 148 Au 5 pour cent la somme double en 14 ans.-
- 149 $a(1+t)^{300} = x$. Si on place $a = 1$ après 300 ans on a 2 000 000.

[Caisses d'amortissement]

150 De ces considérations le gouvernement a eu l'idée des caisses d'amortissement. On emprunte plus d'argent qu'on n'en a besoin et l'excès est placé à intérêt composé. On s'en sert pour payer les dettes et racheter [?] les rentes, - les intérêts s'amortit [?] et elle achète de nouvelles rentes etc. C'est ainsi que la dette du gouvernement finit par s'éteindre puisque les rentes ne sont autre chose que des billets qui représentent le capital emprunté par le gouvernement. Le capital ne se paye pas à 5 pour cent mais à un intérêt qui varie tous les jours ; il est avantageux pour le gouvernement de faire des emprunts quand les rentes sont élevées ; en Angleterre la caisse n'achète que dans les circonstances favorables, en France elle achète toujours un nombre déterminé de rentes par jour etc.

151 [17/18]

152 [8 lignes rayées dont 6 d'un début de § sur les rentes viagères]

Des rentes viagères

153 On entend par là une rente qui doit être payée à un individu jusqu'à sa mort, alors le capital déposé chez le banquier lui appartient voyons qu'elle relation doit exister entre le capital et la valeur de la rente que l'on dépose actuellement.

154 Soient v individus du même âge auxquels on s'engage à payer une rente s tous les ans jusqu'à leur mort : après un an il ne reste plus que v' de ces individus, le banquier paie une somme $v's$ dont la valeur actuelle est $v's/(1+t)$. v » étant le nombre des individus restant après la 2^{de} année, il paie alors v « s qui vaut actuellement v » $s/(1+t)^2$ etc. ; le banquier doit donc recevoir actuellement une somme

155 $S = v's/(1+t) + v'' s/(1+t)^2 + v''' s/(1+t)^3 + \text{etc}$

156 jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'individus ; or chacun des individus doivent donner au banquier une somme a qui, devant être égale pour chacun d'eux, est représentée par :

157 [18/19]

158 S/v donc $a = (s/v) [v'/(1+t) + v''/(1+t)^2 + v'''/(1+t)^3 + \text{etc}]$

159 Cette formule donne a en fonct. de s et réciproquement etc.

160 Les nombres v, v', v'', \dots sont pris dans les tables de mortalité, v [?] est à l'âge de [= un nombre de personnes qui ont le même âge que ?] l'individu qui désire la rente etc.

161 Comme ceux qui placent ainsi à rentes viagères sont indiv. loin [?] de la classe pauvre [?] de la société, la mortalité est moindre pour eux que pour cette dernière classe, il ne faut donc pas considérer la table faite pour tous les individus etc.

162 On peut arriver au même résultat en considérant l'espérance mat^{tique}.

163 En effet la prob. pour que l'individu vive un an est v'/v , le gain qu'il espère est de $s/(1+t)$. La prob. qu'il vivra 2 ans est de v''/v et le gain qu'il espère est de $s/(1+t)^2$, son esp. mat^{tique} pour la 1^{ère} année est donc $(v'/v)[s/(1+t)]$, pour la 2^{de} il est $(v''/v)[s/(1+t)^2]$ etc. [On fait alors] La somme de toutes ces prob. On a ainsi atténué [?] les gains qu'espère l'individu prop. à la prob. qu'il a pour les obtenir ; la somme de ces quantités représente le gain qu'il est en droit d'espérer ou son esp. mat^{tique}, l'espérance mat^{tique} de l'autre joueur, dont la prob. de gagner est 1, doit être égale, il doit donc toucher une somme :

$$164 \quad a = (s/v) [v^1/(1+t) + v^2/(1+t)^2 + \dots]$$

165 [19/20]

Des annuités

166 Quelqu'un a prêté une somme V soit à un particulier, soit au gouvernement, il veut être payé de son capital et des intérêts composés au moyen de n sommes égales payées à une année de distance, ce qui fait qu'en n années il aura touché tout ce qu'on lui doit.

167 Soit s la somme qu'on lui doit payer chaque année, cette somme payée après un an vaut actuellement $l/(1+t)$ etc.

168 V étant la somme qu'il paie, on a, pour déterminer s , la formule

$$169 \quad V = s/(1+t) + s/(1+t)^2 + s/(1+t)^3 + \dots + s/(1+t)^n \text{ d'où } (s/t)[1-1/(1+t)^n] = V$$

170 on peut parvenir au même résultat en cherchant ce que deviennent les sommes V et s après la $n^{\text{ème}}$ année etc.

Des tontines

171 Dans les Tontines, qui on reçu ce nom de Tonti leur inventeur, des actionnaires paient une même somme au banquier qui s'engage à leur donner un revenu constant également distribué entre les survivants.

172 Soit v le nombre d'individus act. de la tontine, sv la rente annuelle et const. que doit payer le banquier, la somme que le banquier paiera en tout est actuellement

$$173 \quad S = vs/(1+t) + vs/(1+t)^2 + \dots + vs/(1+t)^n$$

174 n désignant le nombre d'années après lesquelles on suppose que les actionnaires

175 [20/21]

176 seront morts. Chaque actionnaire doit donc donner actuellement une somme de

$$177 \quad a = S/v = s[l/(1+t) + l/(1+t)^2 + \dots + l/(1+t)^n]$$

Caisses d'épargne

178 On place dans une de ces caisses une somme s à laquelle on ne doit pas toucher, pas plus qu'aux intérêts, pendant n années ; si l'on meurt dans cet intervalle la somme reste à la caisse, si l'on vit après ce terme on reçoit de la caisse une somme annuelle r . etc.

179 Soient v individus, au bout de n années leur nombre est de $v^{(n)}$, au bout de $(n+1)$ années il est de $v^{(n+1)}$ etc-

180 La somme totale qu'elle aura à payer vaut donc actuellement :

$$181 \quad S = v^{(n)}r/(1+t)^n + v^{(n+1)}r/(1+t)^{n+1} + v^{(n+2)}r/(1+t)^{n+2} + \dots$$

182 jusqu'à 90, âge où finissent les tables ; chaque individu devra donc déposer une somme s égale

$$183 \quad S/v \text{ ou } (r/v)[v^n V(1+t)^n + v^{(n+1)}/(1+t)^{n+1} + \dots] = s \text{ etc etc.}$$

184 Cette formule peut encore s'obtenir par les espérances m^{tiques} . La prob. pour qu'un des individus vive après n années est $v^{(n)}/v$ la somme

185 [21/22]

186 qu'il espère [en] valeur actuelle est de $r/(1+t)^n$. Son espérance mathématique est donc $r/(1+t)^n \cdot v^{(n)}/v$, de même pour les années suivantes ; la somme qu'il doit donner à la caisse, dont la prob. est 1, est donc

$$187 \quad s = (r/v) [v^{(n)}/(1+t)^n + v^{(n+1)}/(1+t)^{n+1} + \text{etc}]$$

Assurance sur la vie

188 Un individu place chez un banquier une somme s , s'il meurt avant n années la compagnie paiera à ses héritiers une somme r , s'il ne meurt pas la somme est perdue pour lui. ...

189 Sur v individus de cet âge, il en vit v' après un an, v'' après 2 ans etc, $v^{(n)}$ après n années. Or, si chacun d'eux paie une somme s , après un an comme $v-v'$ sont morts le banquier aurait à payer $(v-v')r$, somme dont la valeur actuelle est de $(v-v')r/(1+t)$. $v'-v$ » individus meurent dans la 2^{de} année, le banquier paiera une somme vallant actuellement $(v'-v'')r/(1+t)^2$ etc., donc le banquier débourse pendant n années la somme

$$190 \quad S = (v-v')r/(1+t) + (v'-v'')r/(1+t)^2 + \dots + (v^{(n-1)}-v^{(n)})r/(1+t)^n ;$$

191 divisant par v , on a la somme que doit déposer chaque individu. Les espérances mathématiques donneroient le même résultat.

192 [22/23]

Assurance maritime

193 Si on avoit formé une table contenant le nombre de vaisseaux qui partent, et le nombre de ces vaisseaux qui périssent, on auroit une sorte de table de mortalité qui permettroit de calculer la prime à exiger des armateurs au départ d'un vaisseaux. Mais cette table n'existe pas et de plus tant de choses sont à considérer, la bonté du bâtiment, la longueur du voyage, les connaissances du capitaine, les progrès de la navigation etc., que l'on ne peut guère décider rigoureusement la question. Il est probable que des Compagnies se sont d'abord formées en demandant des primes beaucoup plus fortes. Leurs gains ont engagé d'autres compagnies à se former en demandant moins etc etc.

Compagnie d'assurances mutuelles et comp^{ies} [... ?]

194 fondées sur les mêmes principes que les Assurances Maritimes etc

195 [24]

Leçon 5ème

196 16 juillet

[Rudiments relatifs aux opérations bancaires]

Du change

197 On entend par là l'opération au moyen de laquelle on obtient un billet payable dans une ville déterminée en déposant de l'argent dans la ville où l'on se trouve : ce billet est ce qu'on appelle la lettre de change celui qui reçoit l'argent et [?] donne la lettre est le tireur, celui qui reçoit le billet est le porteur, celui qui paiera l'argent dans l'autre ville

à vue du billet est l'accepteur, enfin si le porteur cède son billet à un autre individu qui inscrira son nom derrière, il sera l'endosseur.

198 Pour concevoir l'utilité de ces lettres de change concevons que deux villes Paris et Lyon par ex aient des marchandises différentes ; que les commerçans de Paris achettent des marchandises à Lyon et réciproquement ; Il est évident que si ces commerçans pouvoient s'entendre au lieu d'envoyer réciproquement de l'argent d'une ville à l'autre, ils éviteroient les frais et les dangers du transport en payant ceux de Lyon les marchandises achetées par ceux de Paris à condition que ceux de Paris paieraient une même somme pour les marchandises achetées par les com. de Lyon. Pour établir cette relation entre les deux villes, des banquiers correspondants se placent dans l'une et dans l'autre et on va chez l'un déposer l'argent qu'il fera payer chez l'autre au moyen d'un billet

199 [24/25]

200 qu'il délivre. On conçoit que, comme une ville peut faire plus d'affaires qu'une autre, en définitif un banquier sera obligé d'envoyer à l'autre une somme d'argent ; il doit donc le faire payer du transport et des dangers que courra cette somme, c'est pour cela que les frais du change varient suivant la quantité d'affaires que fait une ville relativement à une autre etc. Si l'accepteur refuse de payer, le dernier porteur a recours à l'endosseur qui lui a remis le billet ; celui-ci à l'endosseur précédent etc enfin au tireur etc.

Prix de l'argent

201 Le prix de l'argent n'est pas arbitraire et résulte nécessairement de la difficulté de l'exploiter. Pour nous en convaincre cherchons une marchandise qui ait été toujours aussi facile à extraire [?] dont par suite la valeur a dû être constante dans tous les tems et rapportons lui la valeur de l'argent et de l'or. Le bled satisfait toutes ces conditions. Il est remarquable qu'en tout pays jusqu'à et sous Charlemagne l'argent a eu constamment la même valeur. Il fallait donner 1 livre d'argent pour 6000# de bled et 1# d'or pour 60 000 de bled. Depuis la découverte du nouveau monde la facilité d'obtenir ce métal étant beaucoup plus grande, le prix de l'argent a varié presque subitement et ensuite jusqu'à nous il est devenu presque stationnaire. il a fallu alors 1# d'argent pour 1000# de bled et 1# d'or pour

202 [25/26]

203 1500# de bled. Le prix de l'argent est donc fixé par l'état des choses [?] et les souverains font une fausse spéculation quand ils altèrent la monnaie.

Billets de banque

204 Ces papiers représentent une certaine somme d'argent, ils ont l'utilité d'être bien plus faciles à transporter et à dérober à la vue. Une banque ne peut délivrer plus de billets qu'elle n'a de fonds pour les représenter, mais ce qui fait son bénéfice, c'est que la banque n'a besoin que du tiers de ses fonds pour solder les billets qu'on lui présente, elle peut donc opérer sur les deux tiers qui lui restent ce qui lui permet de s'enrichir d'autant plus qu'elle a plus de capital.

Papier monnaie

- 205 Ce sont des billets que fabrique le gouvernement dans un instant de détresse. Ces billets n'inspirent pas de confiance vu l'état du gouvernement, aussi on ne les remet [?] que pour une bien petite partie de leur valeur. Ainsi les employés payés avec cette monnaie sont-ils aussi bien trompés que si on ne les payait pas du tout etc.

Billets commerciaux et à ordre

- 206 Pour ces billets on s'engage à faire payer une somme à jour fixé ou à vue ces derniers sont les billets à ordre.
- 207 [26/27]

[Erreurs d'observations, méthode des moindres carrés]

- 208 Dans les expériences et observations on parvient ordinairement à des éq de la forme $a+bx+cy+dz=0$ - l'expérience détermine les coeff. en faisant plusieurs expériences, on obtient d'abord trois éq :
- 209 $a'+b'x+c'y+d'z=0$
 $a''+b''x+c''y+d''z=0$
 $a''' +b'''x+c'''y+d'''z=0$
- 210 Si on étoit sûr que les coeff. eussent été bien déterminés par les expériences on pourroit en tirer la valeur des quantités x,y,z ; mais comme on n'est pas bien sûr de ces coeff. on fait encore d'autres coeff.
- 211 $a^{iv}+b^{iv}x+c^{iv}y+d^{iv}z=0$
 $a^v+b^vx+c^vy+d^vz=0$
 $a^{vi}+b^{vi}x+c^{vi}y+d^{vi}z=0$
- 212 Si on prend les valeurs dans 3 quelconques de ces éq et qu'on les subst. dans les autres, elles ne seront pas satisf., il y aura un résultat. Une valeur moyenne entre [?] celles tirées de toutes les éq ne satisferait exactement] à aucune et on aurait la suite :
- 213 $a'+b'x+c'y+d'z=\$'$
 $a''+b''x+c''y+d''z=\$''$
 $a''' +b'''x+c'''y+d'''z=\$'''$
- 214 Les valeurs qui seront les plus exactes seront celles qui rendront $\$'$, $\$''$, $\$'''$ etc les plus petits [?] possible, il ne faut pas que $\$'+\$''+\$'''$... soit un minimum car on ne doit pas considérer les signes, c'est pourquoi nous chercherons à rendre $\$'^2+\$''^2+\$'''^2+...$ au minimum. Cherchons à rendre au minimum les quantités :
- 215 [27/28]
- 216 $(a'+b'x+c'y+d'z)^2 + (a''+b''x+c''y+d''z)^2 + \text{etc.}$
- 217 posant la condition pour que cette quantité soit un minimum nous obtiendrons trois éq qui détermineront x , y et z . En effet pour qu'une quantité $f(xyz)$ soit un minimum il faut que $f^x(xyz)=0$ $f^y(xyz)=0$ $f^z(xyz)=0$ D^{tiant} l'éq par rap. à x :
- 218 $2b'(a'+b'x+c'y+d'z)^2 + 2b''(a''+b''x+c''y+d''z)^2 + \text{etc} = 0$
- 219 ou
- 220 $a'b'+b'^2x+b'c'y+b'd'z+b''a''+b''^2x+c''b''y+b''d''z+\text{etc}=0$

221 ou

$$222 \quad a'b'+a''b''+\text{etc} + (b'^2+b''^2+\dots)x + (b'c'+b''c''+\text{etc})y + (b'd'+b''d''+\text{etc})z = 0$$

223 ou

$$224 \quad \Sigma (a'b') + \Sigma b'^2.x + \Sigma b'c' y + \Sigma (b'd')z = 0 ;$$

225 on auroit des éq semb. en D^{tiant} par rap. à y et à z. Le cas le plus simple est celui où on a les éq

$$226 \quad x-a' = 0$$

$$x-a'' = 0$$

$$x'-a''' = 0$$

227 faisant la somme des carrés, il vient $(x-a)^2+(x-a')^2+(x-a'')^2+\text{etc}$.

228 Diff^{tiant}

$$229 \quad x-a + x-a' + x-a'' + \text{etc} = 0$$

$$d'où \quad x = (a+a'+a''+\text{etc})/n$$

230 Laplace a démontré longuement qu'en faisant la somme des carrés on trouve un résultat plus exact qu'en faisant celle des 3^{èmes} 4^{èmes} etc puissances etc.

fin du cours d'arithmétique sociale le 16 juillet 1825

231 [28/29]

[Appendice [?]

232 Formule d'estimation de Bayes-Laplace]

Probabilités

233 Un événement A étant arrivé m fois et l'événement contraire B n fois, quelle est la probabilité pour que l'un ou l'autre arrive une fois de plus ? Ne connaissant pas les causes qui amènent un événement on en doit admettre une infinité. Soit x la prob. pour que l'événement A arrive d'après une de ces causes, 1-x sera d'après la même cause la prob. pour que l'événement B arrive. Par suite, d'après un théorème que nous démontrerons, $C x^m (1-x)^n$ est la prob. pour que, dans l'hyp. admise, A soit arrivé m fois et B n fois. Pour avoir la somme des prob. des hypothèses, il faut intégrer cette quantité entre 0 et 1 ; on a donc, pour cette somme :

$$234 \quad C \text{ SOMME}_0^1 x^m (1-x)^n dx = C n(n-1)(n-2)\dots 1 / (m+1)(m+2)\dots(m+n+1)$$

235 Divisant la prob. de l'événement arrivé dans l'hypot. par la somme des prob. des hypot. on aura la prob. de l'hyp. cette prob. est donc

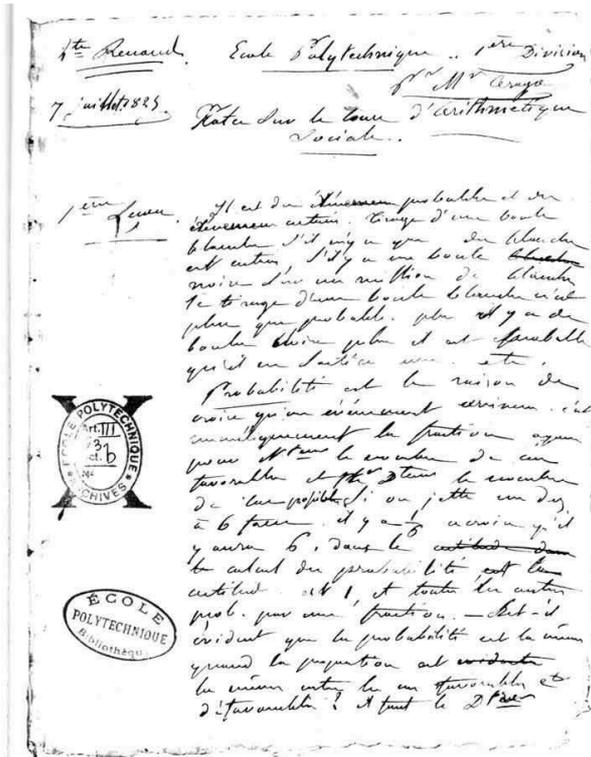
$$236 \quad x^m (1-x)^n / 1.2\dots n / (m+1)(m+2)\dots(m+n+1).$$

237 M^{pliant} la prob. de l'hypot. par la prob. de l'événement dans cette hypot., j'aurai la prob. de l'événement cette prob. est donc

$$238 \quad x^{m+1} (1-x)^n / 1.2\dots n / (m+1)(m+2) \dots (m+n+1),$$

239 mais l'événement peut arriver dans toutes les hypothèses, il peut donc arriver quand x prend toutes les valeurs possibles entre 0 et 1 ; il faudrait pour avoir la prob. de l'événement donner à x toutes ces valeurs, et ajouter ces résultats, ce qui revient à intégrer entre 0 et 1, on a évidemment pour résultat :

- 240 $1.2.3.....n/(m+2)(m+3)...(m+n+2)/1.2.3.....n/(m+1)(m+2)...(m+n+1)$
 $= (m+1)(m+2)...(m+n+1)/ (m+2)(m+3)...(m+n+1) = (m+1)/(m+n+2)$
- 241 [29/30]
- 242 Si on fait $n=0$ on obtient $(m+1)/(m+2)$ c'est ainsi qu'on a la prob. pour que le soleil se lève encore une fois.
- 243 Démontrons actuellement le théorème sur le quel nous nous sommes appuyés.
 Soient a et b les nombres des cas favorables à deux événements on a
- 244 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- 245 où a^2 représente le nombre de cas favorables à la répétition du 1er événement $2ab$ le nombre de cas favorables à l'arrivée successive des deux événements etc. ; or le nombre total des cas qui peuvent arriver est $(a+b)^2$ donc, D^{sant} par $(a+b)^2$, on a
- 246 $a^2/(a+b)^2 + 2(a/(a+b))(b/(a+b)) + b^2/(a+b)^2$
- 247 pour la prob. des événements, savoir le 1er terme pour la prob. de la répétition de l'événement etc. ; on a donc généralement
- 248 $a^{m+n}/(a+b)^{m+n} + \text{etc} + C a^m b^n / (a+b)^m (a+b)^n + \text{etc}$,
- 249 le terme $C [a/(a+b)]^m [b/(a+b)]^n$ représente donc la prob. pour que l'événement 1 arrive m fois et l'événement 2 arrive n fois, car $a/(a+b)$ est la prob. de l'événement 1, $b/(a+b)$ celle de l'événement 2 ; donc, représentant par p, p' les prob. des arrivées de deux événements, la prob. pour que l'un arrive m fois et l'autre n fois sur un nombre $m+n$ de coups est $C.p^m p'^n$ etc.



Notes de l'éditeur

- 250 Le texte étant assez clair et pédagogique, nous indiquerons seulement :
1. les passages de [Lacroix, 1822] et de [Laplace, 1814-1986], dont Arago s'est inspiré,
 2. quelques références permettant de resituer les concepts et résultats dans le cadre de l'époque et dans leurs développements ultérieurs.

1ère leçon

- 251 Définition de la probabilité : Lacroix, p. 10.
- 252 Dire que la probabilité est « la raison de croire qu'un événement arrivera » est le versant subjectif de la définition. Cette théorie étudiée en détail par Condorcet [Granger, Rashed] est partiellement reprise par Lacroix qui parle de « mesure du degré de confiance dans l'arrivée » d'un événement. La définition numérique de la probabilité est issue de J. Bernoulli. Pour une discussion philosophique récente à ce sujet, voir par exemple [Bonitzer].
- 253 Le raisonnement de Laplace à l'aide du fil est tiré de Laplace, p. 35.
- 254 Objections de d'Alembert : Lacroix, p. 36, qui affirme à ce propos :
- « L'exposition et la réfutation d'une seule de ces objections suffira pour les faire apprécier toutes ; car elles n'ont obtenu l'assentiment d'aucun géomètre distingué, et elles prouvent seulement qu'il peut arriver aux hommes les plus justement célèbres, de s'égarer même dans un sujet fort simple ».
- 255 Cette opinion de Lacroix est contestée aujourd'hui : d'Alembert met le doigt, certes sans apporter de solutions, sur les vraies faiblesses des fondements du calcul des probabilités au milieu du XVIIIe siècle : qu'est-ce vraiment que l'égalité des cas ? qu'est-ce que l'indépendance ? dans quelle mesure les résultats des expériences passées nous donnent-elles des informations sur les expériences futures ? en quoi l'espérance mathématique est-elle un résumé pertinent d'une grandeur dépendant du hasard ? [Daston, 1988 ; Paty]

2e leçon

- 256 Probabilité composée dans le cas non indépendant : l'exemple est tiré de Laplace, p. 41 (quatrième principe du calcul des probabilités)
- « Des inégalités inconnues qui peuvent exister entre les chances que l'on suppose égales » : Laplace, p. 75 ; Lacroix, p. 68.
- 257 Pair ou non : problème ancien abordé par Dortous de Mairan dans l'*Encyclopédie* (cf. aussi *Encyclopédie Méthodique* - section Mathématiques, t. 2, p. 506-508) ; Arago s'inspire de la solution de Bertrand (cf. Lacroix, p. 70-72 et 313-315). On remarquera facilement que la définition des événements élémentaires équiprobables, dans ce cas, est discutable : Bertrand prend les $2n$ combinaisons possibles, alors que Dortous de Mairan prenait les nombres possibles.
- 258 Probabilité des causes : Laplace, p. 44-46 (septième principe) ; Lacroix, p. 146, énonce ainsi ce principe de vraisemblance :
- « Les probabilités des causes (ou des hypothèses) sont proportionnelles aux probabilités que ces causes donnent pour les évènements observés ».

- 259 L'appendice complète cette leçon. L'impulsion fondamentale sur ces questions vient de [Bayes, 1764], Condorcet et [Laplace, 1774].
- 260 Espérance mathématique : Laplace, p. 46-48 (huitième et neuvième principes), Lacroix, p. 102... On avait coutume, en général, de définir l'espérance mathématique dans le cas où deux événements sont possibles, et de ne parler qu'ensuite du cas de plusieurs événements. Condorcet aborde, lui, d'emblée la définition de l'espérance de la manière suivante :
- « Supposons qu'un certain nombre d'événements procurent à un homme les avantages a, a', a'' , etc et que leurs probabilités soient e, e', e'' , etc ; que d'autres événements lui causent des pertes p, p', p'' , etc et que leurs probabilités soient c, c', c'' , etc l'avantage qui en résulte sera exprimé suivant la règle ci-dessus, par $ea + e'a' + e''a'' + \text{etc}$
 $- cp - c'p' - c''p'' - \text{etc}$ ».
- 261 Le concept de variable aléatoire, ici sous-jacent, n'est cependant pas dégagé explicitement ; mais cette définition est tout de suite adaptée à l'étude du problème de Pétersbourg et au calcul des rentes viagères.
- 262 Espérance morale : Laplace, p. 48-50, Lacroix, p. 124-136 et 321.
- 263 Il est clair que manque ici un paragraphe expliquant précisément ce qu'est l'espérance morale. Adaptons de Lacroix ce qu'il aurait pu contenir :
- Daniel Bernoulli et Buffon ont fait remarquer qu'un gain de 1 n'avait pas la même valeur « morale » pour celui qui dispose d'une fortune de 1 et celui qui dispose d'une fortune de 100.000. D. Bernoulli a alors proposé d'évaluer la valeur morale des gains possibles a, b, c, \dots , de probabilités e, f, g, \dots en raison du bien antérieur F .
- « Il conçoit ensuite qu'un bien quelconque est produit par l'accumulation d'un nombre infini de petits accroissemens dont chacun y ajoute un degré d'importance proportionnel à son rapport avec le capital déjà formé. »
- 264 Avec le secours du calcul infinitésimal, on trouve facilement que, si x désigne le gain aléatoire, la mesure de l'importance cherchée est alors proportionnelle à $\log(x/F)$. Laplace appelle espérance morale la quantité :
- 265 $(F+a)^e(F+b)^f(F+c)^g - F$
- 266 Problème de Pétersbourg : Laplace, p. 48, Lacroix, p. 136...
- 267 On trouvera des historiques du problème de Petersbourg dans [Jorland, Dutka] : les solutions diverses apportées depuis près de trois siècles y sont décrites. Il est visible qu'Arago s'embrouille un peu ici ou que H. Renaud a du mal à suivre.

3e leçon

- 268 Calcul des partis : Laplace, p. 54, Lacroix, p. 105-107.
- 269 Célèbre problème à l'origine du calcul des probabilités, et traité par Pascal.
- 270 Loterie : Laplace, p. 51, Lacroix, p. 118...
- 271 Tables de mortalité : Laplace, p. 142 ..., Lacroix, p. 189...

4e leçon

- 272 Evaluation de la population : Laplace, p. 143-145, Lacroix, p. 198...
Pour une histoire générale de la démographie, la principale référence est [Dupâquier].
Pour les problèmes probabilistes en jeu au temps de Laplace, voir [Bru, 1988a].
- 273 Problème des naissances : Laplace, p. 81-86 et 164-165, Lacroix, p. 173... Inoculation :
Laplace, p. 145-147, Lacroix, p. 213...
- 274 La discussion sur l'opportunité ou non d'inoculer la petite vérole à des individus sains,
afin de les préserver ultérieurement de la maladie, fut âpre au milieu du XVIIIe siècle,
notamment en raison du taux élevé de risque que comportait alors l'opération. Sur le
plan mathématique, la querelle a opposé en particulier d'Alembert et Daniel Bernoulli
[Paty].
- 275 Intérêt de l'argent, rentes viagères ... : Laplace, p. 149-157, Lacroix, p. 221...

5e leçon

- 276 On trouvera aisément des précisions sur ces considérations financières, évidemment
très élémentaires, dans les encyclopédies et dictionnaires du XIXe siècle. Cet aspect
n'est pas évoqué dans Lacroix.
- 277 Erreurs d'observations : Laplace, p. 89-97, Lacroix, p. 285, n'aborde qu'un cas
particulier. Arago suit ici la méthode des moindres carrés de Legendre, on en trouvera
ensuite des exposés pédagogiques très nombreux, par exemple [Liagre] ou [H. Laurent].

Appendice

- 278 Lacroix, p. 321-323. Il s'agit de la règle dite de Bayes-Laplace, longuement étudiée par
Condorcet et Laplace, et généralement admise (avec controverses éventuelles) au XIXe
siècle [Estimation et sondages].

BIBLIOGRAPHIE

Voir la bibliographie sur l'histoire du calcul des probabilités jusqu'au XIXème siècle, par Pierre
Crépel