



Bulletin de la Sabix

Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de
l'École polytechnique

41 | 2007

Un savant en son temps : Gaspard Monge (1746-1818)

Sur la permanence de l'œuvre de Gaspard Monge dans la science des 20^{ème} et 21^{ème} siècles

Roland Glowinski



Édition électronique

URL : <http://journals.openedition.org/sabix/112>

DOI : 10.4000/sabix.112

ISSN : 2114-2130

Éditeur

Société des amis de la bibliothèque et de l'histoire de l'École polytechnique (SABIX)

Édition imprimée

Date de publication : 1 mars 2007

Pagination : 81-84

ISBN : ISSN N° 2114-2130

ISSN : 0989-30-59

Référence électronique

Roland Glowinski, « Sur la permanence de l'œuvre de Gaspard Monge dans la science des 20^{ème} et 21^{ème} siècles », *Bulletin de la Sabix* [En ligne], 41 | 2007, mis en ligne le 05 décembre 2010, consulté le 08 septembre 2020. URL : <http://journals.openedition.org/sabix/112> ; DOI : <https://doi.org/10.4000/sabix.112>

Ce document a été généré automatiquement le 8 septembre 2020.

© SABIX

Sur la permanence de l'œuvre de Gaspard Monge dans la science des 20^{ème} et 21^{ème} siècles

Roland Glowinski

- 1 De notre point de vue, la permanence de l'œuvre de Gaspard Monge s'appuie sur les deux piliers que sont
 - (i) Le problème (dit) de Monge du transport optimal.
 - (ii) L'équation de Monge Ampère (mentionnée par divers intervenants et qui se trouve avoir des liens profonds (réf. [1]) avec le problème mentionné au point (i), ci-dessus).
- 2 Le problème de Monge du transport optimal relève tout à la fois de la *Géométrie*, du *Calcul des Variations* et de la *Recherche Opérationnelle*. Gaspard Monge, ingénieur militaire, entre autres choses, s'était posé le problème d'optimiser le transport (transfert) de déblais d'un lieu A à un lieu B. Ce problème a été généralisé par le mathématicien russe Kantorovich¹, le problème résultant étant connu sous le nom de *problème de Monge-Kantorovich*. Le problème de Monge-Kantorovich a de nombreuses applications dans diverses branches des Mathématiques et de la Physique, ce qui explique que de nombreux mathématiciens de par le monde étudient ce problème. Au plan national le problème de Monge-Kantorovich a motivé, entre autres, les travaux de Y. Brenier (Université de Nice; réfs. [1] et [2]) et ceux de C. Villani (ENS-Lyon); à propos de C. Villani, il convient de noter que ce mathématicien vient de publier dans *Images des Mathématiques 2004*, une publication du CNRS, un article, relativement accessible, sur le problème de Monge-Kantorovich.
- 3 L'équation de Monge-Ampère est une équation aux dérivées partielles non linéaire se formulant comme suit:

$$(MA) \quad \det D^2\Psi = f.$$
- 4 Dans (MA): l'inconnue Ψ est une fonction de $x = \{x_1, \dots, x_d\}$ avec $d \geq 2$; $D^2\Psi$ est l'Hessienne de Ψ , i.e., la matrice (symétrique) de ses dérivées secondes; f est une fonction donnée. Si $d = 2$ et $f > 0$, (MA) est elliptique et a été étudiée de façon approfondie dans [3] (voir

aussi [4]). Parmi les mathématiciens français ayant contribué de façon importante à l'étude des solutions de l'équation de Monge-Ampère il convient de mentionner Th. Aubin (Université P. et M. Curie, X 61), J.P. Bourguignon (IHES, X 66), B. Gaveau (Université P. et M. Curie, X 68), P.L. Lions (Collège de France, Professeur à l'Ecole Polytechnique), les intérêts du rédacteur portant sur la résolution numérique de (MA) (réf. [5]). Les équations de type Monge-Ampère interviennent en *Géométrie Différentielle* et dans de nombreuses branches de la Physique (Mécanique des Fluides, Théorie de l'Elasticité, Electrodynamique) et des Sciences de l'Ingénieur. Le lien avec la Géométrie Différentielle est évident puisque la *courbure de Gauss* d'une surface de \mathbf{R}^{d+1} , d'équations (locales)

$$(ES) \quad x_1 = x_1, \dots, x_d = x_d, x_{d+1} = \Psi(x_1, \dots, x_d),$$

est donnée par

$$(CG) \quad \det D^2\Psi / (1 + |\nabla\Psi|^2)^{1+d/2}$$

- 5 Les liens avec la Physique et les Sciences de l'Ingénieur sont plus complexes et sont discutés, par exemple, dans [2], [6] et [7]. Les équations de Monge-Ampère interviennent, entre autres, dans la conception d'antennes, certaines questions de Météorologie, en Elasticité Non Linéaire²; sur ce dernier point, les participants du Colloque Gaspard Monge seront heureux d'apprendre que des équations du type Monge-Ampère ont été utilisées pour la conception optimisée de la forme des pare-brise de voitures³; il s'agit là, sans aucun doute, d'un exercice pratique de *géométrie douce*⁴ au sens du Professeur Joël Sakarovich.
- 6 Remarque: Compte tenu du rôle important qu'ils ont joué dans la création de l' Ecole Polytechnique et dans l'élaboration de son enseignement, on observera avec intérêt - au vu de la référence [5] - que des concepts et méthodes dus à *J.L. Lagrange* (liés en fait à *ses multiplicateurs*) sont applicables à la résolution d'un problème venant de *G. Monge*.

Remerciements

Le rédacteur remercie Angela Glowinski, Anne Rouannet et Christian Marbach qui sont à l'origine de cette note.

BIBLIOGRAPHIE

Références

- [1] BENAMOU, J.D. et Y, BRENIER, A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem, *Numer. Math.*, 84, (2000), pp. 375-393.

- [2] BRENIER, Y., Some geometric PDE's related to Hydrodynamics and Electrodynamics. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Beijing 2002, August 20-28, Volume III*, Higher Education Press, Beijing, 2002, pp.761-771.
- [3] CAFFARELLI, L.A. et X. CABRE, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [4] CAFFARELLI, L.A., Nonlinear elliptic theory and the Monge-Ampère equation. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Beijing 2002, August 20-28, Volume I*, Higher Education Press, Beijing, 2002, pp.179-187.
- [5] DEAN, E.J. et R. GLOWINSKI, Numerical solution of the two-dimensional elliptic Monge-Ampère equation with Dirichlet boundary conditions: an augmented Lagrangian approach, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Série I*, 336, (2003), 9, pp. 779-784.
- [6] CAFFARELLI, L.A. et M. MILMAN (eds.), *Monge-Ampère Equation: Applications to Geometry and Optimization*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [7] CAFFARELLI, L.A., S.A. KOCHENGIN et V.I. OLICKER, On the numerical solution of reflector design with given far-field scattering data. In : *Monge-Ampère Equation: Applications to Geometry and Optimization*, L.A.Caffarelli et M. Milman, eds., American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. 13-32.
- [8] CIARLET, P.G., *Mathematical Elasticity; Vol. 2: Theory of Plates*, North-Holland, Amsterdam, 1997.

NOTES

1. (1) L.V. Kantorovich (1912-1986), lauréat du Prix Nobel d'Economie pour ses travaux sur la Programmation Linéaire, effectués indépendamment de ceux de G. Dantzig.
2. Les termes non linéaires des équations de Von Karman (un modèle classique pour la déformation des plaques élastiques minces, réf. [8]) font intervenir une "quantité" fonctionnelle connue sous le nom de crochet de Monge-Ampère, ce qui montre, à l'évidence, la nature géométrique de ces non linéarités.
3. Information glanée en 2003, dans l'exposé d'un mathématicien appliqué de l'Université d'Oxford, lors d'un colloque sur les Méthodes Mathématiques du Calcul Scientifique, au Centre Isaac Newton de l'Université de Cambridge.
4. Pas si douce que cela, en fait, à cause des coins.

AUTEUR

ROLAND GLOWINSKI

Assistant au colloque Monge, Roland Glowinski (X 58) y fit une intervention remarquée sur l'actualité scientifique de certains travaux de notre grand homme. A ma demande il avait alors accepté de nous fournir quelques développements écrits sur ce thème, ici présentés. Roland Glowinski enseigne les mathématiques à Paris et à Houston. Sa carrière a été consacrée, pour l'essentiel, à la résolution numérique de problèmes modélisés par des équations ou inéquations

aux dérivées partielles, et à leur application aux sciences de l'ingénieur. L'Académie des Sciences et l'Académie des Technologies ont reconnu la qualité exceptionnelle de ses travaux en l'élisant parmi leurs membres. C.M.